Adı Soyadı:
Numarası:

2018-2019 GÜZ DÖNEMİ GRUP TEORİ FİNAL SINAVI SORULARI

1) G bir grup ve H, K , G 'nin alt grupları olsun.

$$|HK| = \frac{|H|.|K|}{|H \cap K|}$$

olduğunu gösteriniz.

2) $\mathbb{Z}_{15}^{*}$ grubu veriliyor.

a) Devirli midir? Araştırınız.

b) Bütün alt gruplarını bulunuz.

3) G bir grup $H_1, H_2, \ldots, H_n$, G 'nin normal alt grupları olsun.
$G = H_1 H_2 \ldots H_n$ ve her $1 \le i \le n$ için $H_i \cap (H_1 \ldots H_{i-1} H_{i+1} \ldots H_n) = \{e\}$ ise

$$G \cong H_1 \times \ldots \times H_n$$

olduğunu gösteriniz.

4) Mertebesi 42875 olan grup basit midir? Açıklayınız.

1-) $H \cap K = A$ ve $n = \frac{|H|}{|A|} = [H:A]$, A'nın H içindeki sol kalan sınıfları $x_1A, \ldots, x_nA$ ve $H = \bigcup_{i=1}^{n} x_iA$ dır.
Diğer yandan $HK = (\bigcup_{i=1}^{n} x_iA)K = \bigcup_{i=1}^{n} x_iK$, Ayrıca her $i \neq j$ için $x_iA \neq x_jA$ dır. Dolayısıyla $x_iK \neq x_jK$ dır.
$i \neq j$ için $x_iK = x_jK \Rightarrow x_j^{-1}x_i \in K$, $x_j^{-1}x_i \in H$
$\Rightarrow x_j^{-1}x_i \in A \Rightarrow x_iA = x_jA$ çelişkisi elde edilir.
O halde $\{x_1K, \ldots, x_nK\}$ K'ya göre farklı sol kalan sınıflarıdır.

$$HK = \bigcup_{i=1}^{n} x_iK = x_1K \cup \ldots \cup x_nK$$

$$|HK| = |x_1K| + \ldots + |x_nK| = |K| + \ldots + |K|$$
$$= n.|K| = \frac{|H|}{|A|}.|K| \text{ bulunur.}$$

2) $\mathbb{Z}_{15}^{*} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$, $|\mathbb{Z}_{15}^{*}| = \varphi(15)$

a) $o(\bar{1}) = 1$ $o(\bar{2}) = 4$ $o(\bar{4}) = 2$ $o(\bar{7}) = 4$ $o(\bar{8}) = 4$ $o(\overline{11}) = 2$ $o(\overline{13}) = 4$ $o(\overline{14}) = 2$ olup $o(\bar{a}) = 8$ olan eleman yok, o halde devirli değildir.

b) 8'in böleni olan sayıda elemana sahip ve çarpma işlemine göre kapalı olan kümelere bakmak lazım.

$\{\bar{1}\}$ ve $\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{14}\}$ aşikar alt gruplar

$\{\bar{1}, \overline{11}\}$, $\{\bar{1}, \overline{14}\}$, $\{\bar{1}, \bar{4}\}$

$\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}\}$, $\{\bar{1}, \bar{4}, \bar{7}, \overline{13}\}$

3) $g \in G$ olsun. $g = h_1 \dots h_n$ $(h_i \in H, 1 \leq i \leq n, (i))$ dir.

$g = k_1 \dots k_n$, $k_i \in H$ yazılımı olsa $k_1^{-1} h_1 = (k_2 \dots k_n)(h_2 \dots h_n)^{-1}$ olup

$h_1 \dots h_n = k_1 \dots k_n \Rightarrow$ $k_1^{-1} h_1 = \{e\}$ (ii), $h_1 = k_1$ bulunur. Her biri için yapılırsa $h_i = k_i$ olup g'nin gösterimi tektir.

$K = H_1 \times \dots \times H_n$ olsun

$\varphi : G \longrightarrow K$

$g \longrightarrow \varphi(g) = (h_1, \dots, h_n)$ olarak tanımlansın.

g'nin gösterimi tek olduğundan φ iyi tanımlıdır.

$\forall g, t \in G$ için $g = h_1 \dots h_n$, $t = k_1 \dots k_n$ olsun.

$g.t = (h_1 \dots h_n)(k_1 \dots k_n) = (h_1 k_1) \dots (h_n k_n)$ yazılabilir.

(ii) ve $H_i \trianglelefteq G$ olduğundan

$$\varphi(gt) = \varphi((h_1 k_1) \dots (h_n k_n)) = (h_1 k_1, \dots, h_n k_n) = (h_1, \dots, h_n)(k_1, \dots, k_n) = \varphi(g)\varphi(t)$$

tanımdan dolayı örtendir.

$(h_1, \dots, h_n) \in \operatorname{Ker} \varphi$ olsun. $\varphi(h_1 \dots h_n) = (h_1, \dots, h_n) = (e, \dots, e)$ $\Rightarrow h_1 = \dots = h_n = e$ olup $\operatorname{Ker} \varphi = \{e\}$ bulunur. φ 1-1 dir. O halde $G \cong K$ bulunur.

4) $|G| = 42875 = 5^3 \cdot 7^3$

O halde G'nin Sylow 5 ve Sylow 7 alt grupları vardır.

$n_7 \equiv 1 \pmod 7 \mid 125$ olmalı

$n_7 = 1 + 7k \mid 125$ dir.

$k=0 \Rightarrow n_7 = 1$

$k=1 \Rightarrow 8 \nmid 125$

$k=2 \Rightarrow 15 \nmid 125$

$k=3 \Rightarrow 22 \nmid 125$

$k=4 \Rightarrow 29 \nmid 125$

$k=5 \Rightarrow 36 \nmid 125$

$k=6 \Rightarrow 43 \nmid 125$

$k=7 \Rightarrow 50 \nmid 125$

$k=8 \Rightarrow 57 \nmid 125$

$k=9 \Rightarrow 64 \nmid 125$

$k=10 \Rightarrow 71 \nmid 125$

$k=11 \Rightarrow 78 \nmid 125$

$k=12 \Rightarrow 85 \nmid 125$

$k=13 \Rightarrow 92 \nmid 125$

$k=14 \Rightarrow 99 \nmid 125$

$k=15 \Rightarrow 106 \nmid 125$

$k=16 \Rightarrow 113 \nmid 125$

$k=17 \Rightarrow 120 \nmid 125$

$k=18 \Rightarrow 127 \nmid 125$

O halde G'nin tek bir Sylow 7 altgrubu vardır. Tek olduğu için normaldir. (Teo. 2. Sylow)